LA MASONERÍA Y EL TEOREMA DE GÖDEL

Kurt Gödel[1]

Como masones considero que debemos tener conocimientos en diversas áreas y en función de esta premisa es que considero hacer divulgación de algunos fundamentos de matemáticas resulta pertinente

.

De los muchos tópicos, el teorema de Gödel es uno de los resultados de las matemáticas del siglo XX que aporta crucial valor a las matemáticas. Su importancia es equiparable a la teoría de la relatividad de Einstein o al principio de incertidumbre de Heisenberg.

---

[1] Kurt Gödel ([kuɹtˈgøːdl]) (28 de abril de 1906 Brno (Brünn), Imperio austrohúngaro (ahora República Checa) – 14 de enero de 1978 Princeton, New Jersey) fue un lógico, matemático y filósofo austriaco-estadounidense.
Reconocido como uno de los más importantes lógicos de todos los tiempos, el trabajo de Gödel ha tenido un impacto inmenso en el pensamiento científico y filosófico del siglo XX. Gödel, al igual que otros pensadores como Bertrand Russell, A. N. Whitehead y David Hilbert intentó emplear la lógica y la teoría de conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática. A Gödel se le conoce mejor por sus dos teoremas de la incompletitud, publicados en 1931 a los 25 años de edad, un año después de finalizar su doctorado en la Universidad de Viena.
El más célebre de sus teoremas de la incompletitud establece que para todo sistema axiomático recursivo auto-consistente lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema desarrolló una técnica denominada ahora como numeración de Gödel, el cual codifica expresiones formales como números naturales.
También demostró que la hipótesis del continuo no puede refutarse desde los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos, si dichos axiomas son consistentes. Realizó importantes contribuciones a la teoría de la demostración al esclarecer las conexiones entre la lógica clásica, la lógica intuicionista y la lógica modal.

A pesar de su enorme relevancia, poca gente fuera del mundo de la ciencia ha oído hablar de él. Sin embargo, no es difícil de entender, es más, provoca enorme interés en quienes lo llegan a captar y cuyas aplicaciones ilustran fascinantes paradojas matemáticas.

La mayor aportación de Gödel (1906-1978) es que, junto con otros trabajos de pensadores del siglo XX, sus teoremas establecen límites para las matemáticas en particular y para el conocimiento científico en general. En pocas palabras lo que Gödel nos dice en su teorema es que nunca llegaremos a conocer todos los secretos del Universo.

Esto es importante, pues antes de este resultado, los científicos y el público en general considerábamos que no existía límite para la ciencia. Creíamos que era sólo cuestión de tiempo, pero que al final llegaríamos a comprender todos los secretos de la naturaleza. Los pensadores posteriores a la revolución industrial consideraban que la naturaleza es como una inmensa máquina pre-programada y con optimismo afirmaban que, tarde o temprano, los científicos llegarían a conocer todas las reglas de la máquina. Hoy sabemos que existen aspectos que son imposibles de conocer debido a las limitaciones inherentes a cualquier sistema de conocimientos, incluida la ciencia misma.

Muchos afirmaron que la ciencia no tiene respuestas a todas las preguntas. Cualquiera puede decir esto, pero Gödel fue el primero en demostrar rigurosamente esta aseveración y construyó su demostración usando el lenguaje preciso de la lógica simbólica. Gödel utilizó el rigor de las matemáticas para demostrar que las matemáticas mismas son incompletas. ¿Qué quiere decir esto? ¿Qué implicancias tiene esto para el conocimiento humano? ¿Por qué es tan importante éste resultado?

Espero que esta presentación despierte el interés entre los hijos de la Lux.

PRELIMINARES

1. Para comprender el teorema de Gödel tenemos que preparar la mente: colocarla en una disposición especial, acostumbrarla poco a poco a clarificar paradojas y entender contradicciones aparentes.
   Empezaremos por Sócrates: “Sólo sé que nada sé”
   Sócrates afirma que sabe una sola cosa y por lo tanto se contradice al decir que no sabe nada. Ese algo que él sabe es justamente “que no sabe nada”. Si

es verdad que "Sócrates no sabe nada" entonces se contradice al afirmar que "sólo sé…", pues eso que sabe, ya es algo diferente a nada.
La aseveración que Sócrates plantea es muy probable que haya sido dicha con plena conciencia de la contradicción que encierra. Sócrates hace referencia de sí mismo y ahí es donde aparece la contradicción. El teorema de Gödel tiene que ver con afirmaciones que hacen referencia a sí misma.

2. Otra antigua paradoja llamada "paradoja de Epiménides o del mentiroso". Epiménides es un cretense que supuestamente hizo la inmortal aseveración "todos los cretenses mienten". Supongamos que nos encontramos con Epiménides y nos dice: "Soy un mentiroso empedernido. Nunca digo la verdad".
   ¿Qué podemos concluir? Empecemos a usar un poco de lenguaje matemático. Titulemos la proposición Nunca digo la verdad con la letra A. Si esto es cierto, entonces Epiménides siempre miente. Por lo tanto todas las afirmaciones que él diga son falsas. En particular la frase A, que él mismo dijo, es necesariamente falsa y en este caso podemos concluir que él siempre dice la verdad. Es decir que si A es verdad entonces A es mentira y viceversa.
   Una vez más hay una contradicción en la frase debido a una referencia a sí mismo.
3. Una variante de la paradoja de Epiménides sería si nos dice: "esta aseveración es falsa"
   ¿Epiménides está diciendo la verdad o está mintiendo? Empleemos un poco de lenguaje matemático y a la proposición "esta aseveración no es verdad" le asignamos B, lo que es lo mismo B es falsa.
   Entonces hay dos posibilidades: B es verdadera o B es falsa. Analicemos cada posibilidad:
   Si B es verdadera, entonces, como B se refiere a sí misma, resulta que lo que B dice es verdad. Y justamente, lo que B dice es que B es falsa.
   La otra posibilidad es que B sea falsa. En este caso, lo que B afirma es mentira y lo que afirma es que B es falsa. Entonces resulta que B es verdad.
   Nuevamente encontramos que la contradicción aparece en una frase que hace referencia a sí misma.
   Este tipo de paradojas que violan la dicotomía habitual que separa las aseveraciones en verdaderas o falsas inspiró a Gödel a usar el razonamiento lógico para analizar el propio razonamiento lógico. Esta idea de hacer "introspección" en las matemáticas resultó fructífera.
   Una forma de expresar el teorema de Gödel se parece a la aseveración B, pero Gödel sustituye la palabra "verdad" por la palabra "demostrable". La aseveración que veremos más adelantes es:

G = Esta aseveración no es demostrable = G es indemostrable.

Lo que dice Gödel es que G puede ser verdad, pero que no vamos a poder demostrar que es verdad. Aquí aparece por primera vez el hecho de que la verdad es más poderosa que lo demostrable.

4. Otra variante de la paradoja de Epiménides. Consideremos las siguientes frases:

   La siguiente oración es falsa.

   La oración anterior es verdadera.

   Estas dos aseveraciones tomadas por separado no encierran ninguna contradicción, pero tomadas en conjunto aparece la paradoja. Esta vez, si la primera es verdadera, la segunda ya no lo es. Igualmente al revés. El disfraz de la contradicción es un círculo vicioso, ya que la primera frase hace referencia a la segunda y viceversa.
5. Ahora conozcamos la paradoja de Russell. Antes de plantearla permítanme contar su historia:

   A fines del siglo XIX el matemático Friederich Ludwig Gottob Frege (1848-1925), uno de los fundadores de la lógica simbólica, propuso que las matemáticas podían reducirse a la lógica y dedicó la mayor parte de su vida a demostrarlo. Escribió dos grandes tomos titulados “Las Leyes Básicas de la Aritmética”. Publicó el primer tomo y cuando el segundo estaba en la imprenta, en 1902, recibió una carta de un joven de 30 años llamado Bertrand Russell, quien le planteó una paradoja que generaba una contradicción en el sistema de axiomas de Frege. Después de muchas cartas entre ambos y de tratar de reparar sus sistemas de axiomas, Frege decidió finalmente publicar su segundo tomo, pero en la introducción escribió que hacia la publicación con gran tristeza, pues la obra de toda su vida quedaba en entredicho por la paradoja de Russell.

Bertrand Russell contribuyó a la lógica en el siglo XX. La paradoja que descubrió puso en duda al campo entero de las matemáticas, pues parecía que la metodología de éstos (que está basada en la lógica) tenía contradicciones esenciales. La paradoja de Russell propició numerosos e importantes trabajos en teoría de conjuntos, lógica y filosofía para consolidar nuevamente los fundamentos de las matemáticas.

Ahora analicemos la paradoja de Russell presentada en términos sencillos:

Vivimos en un pueblo apartado de la civilización. En este pueblo es mal visto que los hombres lleven barbas, por lo que todos están rasurados. En el pueblo hay un solo barbero que rasura a todos los hombres que no se rasuran a sí mismos.

Entonces podemos separar a los hombres en dos conjuntos: aquellos que acuden al barbero para que los rasure (conjunto que llamaremos B) y aquellos que se rasuran a sí mismos (conjunto S).

Bertrand pregunta ¿En cuál de estos dos conjuntos está el barbero?

Hay dos posibles respuestas: "el barbero está en el conjunto S pues él se rasura a sí mismo. Es decir, que el barbero rasura al barbero, ¿verdad? Pero si esto es así, entonces acude al barbero para que lo rasure, lo cual implica que forma parte del conjunto B.

También podemos responder que el barbero forma parte del conjunto B de los hombres que le piden al barbero que los rasure. Pero como él es el barbero, esto quiere decir que se rasura a sí mismo, lo cual lo coloca en el conjunto S. ¿está clara la contradicción por resolver?

Para terminar esta parte preparatoria es necesario mencionar que fue el propio Bertrand Russell, junto con otro gran matemático, Alfred North Whitehead (1861-1947), quienes lograron reparar el daño causado a los cimientos de las matemáticas por su famosa paradoja. Entre ambos publicaron en 1913 una de las obras monumentales de esta ciencia, a la que titularon Principia Matemática y en la que lograron volver a consolidar sus fundamentos.

Sin embargo, unos cuantos años después llego Kart Gödel, quien volvió a poner en aprietos al propio Bertrand Russell, a las matemáticas y a todo el conocimiento científico

TEOREMA DE GÖDEL

En 1931 Kurt Gödel publicó un artículo titulado: "Sobre proposiciones formalmente no decidibles en Principia Mathematica y sistemas relacionados"

La proposición VI de este artículo es lo que hoy se conoce como el primer teorema de Gödel. Esta proposición dice lo siguiente:

PROPOSICIÓN VI.

"A toda clase c de fórmulas w-consistente recursivas le corresponde una clase-signo r tal que ni v Gen r ni Neg (v Gen r) pertenecen a Flg (c), donde v es la variable libre de r".

Esta es una traducción al español de lo que Gödel publicó en alemán, aunque igual podría estar en alemán o en jeroglíficos egipcios, pues lo entendemos ¿verdad?

Vamos entonces a empezar de nuevo, pero intentando explicar increíble proposición VI de manera sencilla y comprensible.

Regresemos al título del artículo de Gödel: "Sobre proposiciones formalmente no decidibles en Principia Mathematica y sistemas relacionados" y analicemos el título.

Cuando presentamos la paradoja de Russell, en su Principia Mathematica presentó una formulación, aparentemente completa (es decir, que toda proposición verdadera podía demostrarse) y consistente (o sea que nunca aparecerían contradicciones y ni paradojas), del razonamiento matemático. Consideraron que su metodología permitiría construir cualquier formulación matemática presente y futura.

El efecto inmediato de esta publicación fue el de tranquilizar a todos los matemáticos de la época, pues volvía a darle solidez el edifico lógico que la paradoja de Russell había conmocionado. Esta obra superaba aparentemente las dificultades; sin embargo, no dejaba totalmente claro que nunca sería posible obtener resultados contradictorios. Tampoco era del todo evidente que en verdad todas las matemáticas estaban potencialmente contenidas en su metodología.

La calma duró casi veinte años. Hasta que llegó Gödel.

En su artículo de 1931, Gödel se refiere a Principia Mathematica y sistemas relacionados. Esto implica que lo que va a decir es válido en la estructura lógica que proponen Russell y Whitehead en su libro, así como en cualquier otro sistema similar o relacionado, y con esto abarca a todas las construcciones de la lógica matemática que se basan en un conjunto de axiomas. Un axioma es una creencia básica que se acepta sin demostración alguna y que sirve como cimiento para construcciones intelectuales subsecuentes. Los sistemas basados en axiomas incluyen a todas las matemáticas, a buena parte de la ciencia y a numerosos territorios intelectuales todavía inexplorados. Gödel es precavido y no se atreve a afirmar que lo que va a decir es válido universalmente. Su teorema es válido para todo sistema basado en un número finito de axiomas. Lo que esto abarca es verdaderamente muchísimo territorio intelectual.

Bien, sigamos adelante. Ya hemos entendido la parte final del título del artículo: Gödel nos va a decir algo muy importante que es válido para todos los sistemas que se describen en el libro Principia Mathematica, así como para cualquier otro sistema lógico basado en un número finito de axiomas. Veamos ahora la primera parte del título, eso de proporciones formalmente no decibibles:

Una proporción es una aseveración o una afirmación que puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo, la siguiente es una proposición:

“Dos más dos son cinco” o en lenguaje matemático: $2 + 2 = 5$.

La falsedad de esta afirmación puede demostrarse con facilidad.

Una proporción formalmente decidible es aquella aseveración cuya verdad o falsedad puede decidirse o demostrarse usando la metodología formal de la lógica matemática del sistema en el que estamos trabajando. Es decir, que a partir de los axiomas básicos del sistema y usando las reglas de la lógica podemos llegar a demostrar sin lugar a dudas si la proporción es verdadera o falsa. En cambio, una proposición formalmente no decidible es una aseveración que puede ser verdadera o falsa, pero que hagamos lo que hagamos usando los axiomas y el formalismo del sistema lógico matemático, nunca vamos a poder decidir o demostrar si es verdadera o falsa.

Entonces el título original del artículo de Gödel: “Sobre proporciones formalmente no decidibles en Principia Mathematica y sistemas relacionados” podría haberlo escrito de la siguiente manera:

“Les voy a hablar de aseveraciones cuya verdad o falsedad no vamos a poder decidir usando los razonamientos de sistema lógicos basados en axiomas, como son, por ejemplo, los del libro Principia Mathematica”.

Si ahora traducimos la famosa proporción VI (conocida como el teorema de Gödel) a su lenguaje fácil de entender podríamos escribir sencillamente:

TEOREMA DE GÖDEL

“Existen aseveraciones cuya verdad/falsedad no vamos a poder demostrar”.

Nótese que Gödel no se interesa en saber si una aseveración es falsa o verdadera. Lo que afirma es que en cualquier sistema lógico basado en axiomas, existen aseveraciones cuya verdad o falsedad no vamos a poder decidir. Antes de Gödel esto ni siquiera se consideraba, pues lo interesante de una aseveración era poder demostrar que era verdadera o bien que era falsa. A partir de Gödel aparece una diferencia muy sutil entre verdad/falsedad y demostrabilidad.

Dicho de otra manera, Gödel nos hace ver que la verdad es una categoría más poderosa que la demostrabilidad.

Aclaremos esto. Lo que Gödel demuestra es que en todo sistema axiomático formal existen aseveraciones cuya verdad o falsedad es imposible de decidir desde dentro del sistema. Si nos salimos del sistema, entonces podremos saber si son verdaderas o falsas, pero dentro del sistema no. Este resultado se conoce como el teorema de indecidibilidad de Gödel.

El tipo de paradojas lógicas que vimos al inicio son justamente proposiciones no decidibles.

La existencia de estas paradojas o proporciones no decidibles deja al sistema lógico de referencia debilitado. Un matemático quisiera que su sistema basado en unos cuantos axiomas fuera suficientemente poderoso, completo y consistente para que fuera posible decidir formalmente sobre la verdad o falsedad de cualquier proposición.

¿Cuál es el problema? Podría decir otro incauto matemático, la solución en el que estamos trabajando con un axioma adicional que permita demostrar que la tal aseveración indecidible es en efecto verdadera o falsa. Y el asunto quedó resuelto.

¿No?

No, porque el teorema de Gödel vuelve a operar en este nuevo sistema lógico aumentando ya que van a existir otras nuevas proposiciones cuya verdad/falsedad no van a poder decidirse. Cada vez que aumentamos nuestro sistema con un nuevo axioma reparando así el problema de las proporciones no decidibles. Para resolver todo este embrollo tendríamos que seguir añadiendo axiomas y más axiomas hasta llegar a un sistema lógico con un número infinito de axiomas, lo cual es imposible.

Para aclarar las objeciones anteriores, Gödel demostró que en un sistema formal suficientemente rico o poderoso para que la verdad o falsedad de cualquier aseveración siempre pueda decidirse, existirán proposiciones contradictorias o paradójicas. Esta vertiente se conoce como el teorema de incompletos de Gödel.

Recapitulando, el teorema de Gödel nos dice que ningún sistema basado en un número finito de axiomas está completo, ya que siempre existirán proposiciones cuya verdad o falsedad será imposible de decidir.

Equivalentemente, si se requiere que el sistema esté completo, en el sentido de que siempre podamos decidir sobre la verdad o falsedad de una proposición, entonces aparecerán paradojas y el sistema no será consistente.

Volvamos a enunciar el teorema de Gödel de maneras sencillas y comprensibles:

En 1931 Kurt Gödel publicó un artículo titulado: “Sobre proposiciones formalmente no decidibles en Principia Mathematica y sistemas relacionados”

Aplicado específicamente al libro Principia Mathematica el teorema de Gödel diría: El sistema propuesto en Principia Mathematica incluye proposiciones indecidibles.

Principia Mathematica fue entonces la primera víctima del teorema de Gödel, pero ciertamente no fue la última. Cuando Gödel dice sistemas relacionados incluye a cualquier sistema axiomático, en cuyo caso su teorema puede formularse de manera más general estremeciendo así a las matemáticas enteras:

Toda formulación axiomática y consistente en matemáticas incluye proposiciones indecidibles.

Pero su teorema es todavía más general, ya que muchas ciencias y otras construcciones intelectuales de la humanidad se basan en conjuntos de leyes o axiomas. Entonces el teorema de Gödel en toda su generalidad se podría plantear así:

Toda formulación axiomática y consistente incluye proposiciones indecidibles.

Esta última formulación nos dice simple y sencillamente que cualquier construcción intelectual que se base en un conjunto de axiomas y que sea internamente consistente (es decir, que no admita contradicciones internas), nunca quedará completa ya que siempre tendrá en su seno proposiciones que no podrá entender, explicar ni decidir si son verdaderas o falsas.

Usando la segunda versión del teorema de Gödel, podríamos decir que si logramos construir un sistema intelectual suficientemente poderoso para que sea completo (en el sentido de siempre poder decidir, explicar y entender cualquier proposición), lo lograremos pagando un precio muy alto: que en dicho sistema aparecerán irremediablemente contradicciones y paradojas, por lo que será inconsistente. Es decir:

Si un sistema es consistente, entonces es incompleto, y si el sistema es completo, entonces es inconsistente.

Como puedes imaginar, lector, las implicaciones del teorema de Gödel para las matemáticas, la ciencia y el conocimiento humano en general, son inmensas y sus efectos han sido devastadores para quienes creían que la ciencia, llegaría a descifrar completamente a la naturaleza. Hoy, gracias a Gödel, la ciencia se ha bajado de su arrogante torre de marfil, los científicos nos hemos vuelto un poco más humildes y todos hemos tenido que aceptar las limitaciones inherentes en el potencial del conocimiento.

En los siguientes temas veremos algunas implicaciones del teorema, una demostración informal y poco rigurosa, así como datos biográficos de Kurt Gödel.

IMPLICANCIAS DEL TEOREMA DE GÖDEL

Analicemos las implicancias del teorema de Gödel en diversos sistemas de conocimiento.

Empezaremos por aquellos sistemas que están sustentados rigurosamente y cuyas hipótesis cumplen con las requeridas por dicho teorema. Poco a poco iremos considerando sistemas que relajan más y más las hipótesis subyacentes, conscientes de que tal vez ya no sea posible que el teorema se aplique con todo rigor, pero permitiendo a cambio que nuestras mentes conciban nuevas posibilidades y se planteen preguntas interesantes.

Sabemos que el teorema de Gödel puede demostrarse de una forma rigurosa y que se aplica a cualquier sistema de razonamiento basado en un conjunto finito de axiomas o leyes básicas. Estos sistemas incluyen a todas las ramas de las matemáticas, a muchos planteamientos de la filosofía y la lingüística, así como a las ciencias duras como la física o la astronomía. Sin embargo, otras ramas del conocimiento humano, por ejemplo las ciencias sociales como la economía, la psicología o la sociología u otras todavía menos científicas, como la teología o la historia, no permiten que el resultado del teorema de Gödel se les aplique con rigor y las implicaciones que se obtengan de esta dudosa aplicación pueden ser falsas.

En pocas palabras, lo que el teorema de Gödel parece afirmar en términos muy generales, es que el conocimiento racional nunca podrá penetrar hasta el final y alcanzar la verdad última y definitiva del universo. Esta limitación no solamente es válida para los conocimientos que la humanidad pueda llegar a alcanzar con toda su ciencia y tecnología presente o futura, sino que va más allá del ser humano y habla de cualquier sistema finito de conocimientos ser creado por un ser biológico, electrónico o de cualquier otro tipo, aunque no lo podamos imaginar.

Esta limitación fue la causa de infinita angustia para matemáticos, científicos y filósofos, pero, paradójicamente, la comprensión y aceptación del teorema de Gödel es también una suerte de liberación.

En las palabras de Rudy Rucker: Para muchos estudiantes de lógica la comprensión profunda del teorema es prácticamente una experiencia mística. Esto se debe en parte a la leyenda que el nombre de Gödel lleva consigo, pero en el fondo se debe a que la comprensión de la naturaleza laberíntica del castillo que te aprisiona, de alguna forma te otorga la libertad.

MATEMÁTICAS

Este teorema terminó con numerosos intentos a lo largo de un siglo entero para establecer un conjunto finito de axiomas que cimentara y permitiera construir a la totalidad de las matemáticas, tanto las conocidas como las que se descubrirían en el futuro. Los intentos más importantes habían sido los de Cantor, Frege, Hilbert, Russell y Whitehead. Los resultados de Gödel mostraron que las matemáticas nunca quedarán completas y que siempre quedarán problemas que no podrán resolverse bajo ningún conjunto de reglas o procedimientos.

Gödel demostró que dentro de cualquier sistema lógico rígido, como el que Russell y Whitehead desarrollaron para la aritmética, se pueden formular proposiciones para las cuales es imposible decidir si son verdaderas o falsas dentro de los axiomas del sistema. Esto es, dentro del sistema existirán siempre aseveraciones perfectamente bien definidas que no pueden ser aceptadas como ciertas ni rechazadas como falsas. Por lo tanto uno nunca podrá, usando los métodos tradicionales, estar seguro de que los axiomas del sistema matemático en cuestión no nos llevarán a contradicciones. Esto destruye la esperanza que una vez tuvieron los matemáticos de lograr la certeza en la solución de cualquier problema planteado de forma lógicamente correcta.

CIENCIA

Si nos referimos ahora a la ciencia y al método científico en general, el teorema de Gödel, sumado al principio de incertidumbre de Heisenberg y a la impredicibilidad esencial de los sistemas caóticos, establecen limitantes profundas para los alcances del conocimiento científico. El resultado, en última instancia, es la muerte irremediable del ideal científico tradicional, que era el de establecer un conjunto de leyes o axiomas básicos a partir de los cuales pudieran deducirse y comprenderse todos los fenómenos de la naturaleza.

La física es tal vez la ciencia que mejor ha establecido sus leyes básicas o axiomas sobre los que construye su conocimiento. Por esto mismo, es de todas las ciencias la que mejor comprende las implicaciones del teorema de Gödel y de los demás resultados mencionados en el párrafo anterior. Los físicos han entendido y aceptado que las limitaciones de su disciplina no se deben tanto a la falta de presupuestos, o a la necesidad de construir instrumentos cada vez más poderosos, ni tampoco a la velocidad del avance en sus descubrimientos y ni siquiera a las restricciones inherentes a la mente humana. Hoy ya saben que nunca llegarán a resolver todos los problemas que plantea su disciplina debido a que todo sistema racional de conocimientos es esencialmente incompleto.

Una forma distinta de entender por qué la física, como cualquier otro sistema simbólico finito que usemos para describir o modelar al universo, es incompleta, es aceptando que la física, o dicho sistema simbólico finito, no existe aparte del universo, sino que es parte integrante de él. También nosotros mismos, los físicos y los pensadores formamos parte del universo. Puesto que tanto el sistema de conocimientos como nosotros, sus creadores, somos parte del universo, nuestra ciencia y nuestra comprensión del universo representan un caso de un sistema haciendo un modelo de sí mismo. Es decir, se trata de una pequeña parte de la realidad (nosotros y nuestros sistemas simbólicos) intentando hacer un modelo de la realidad completa (el universo). Esto nunca puede tener éxito debido a la paradoja que resulta de la auto-referencia: el modelo es parte del universo, por lo que, en efecto, el universo tendría que ser mayor que sí mismo (¿está claro?).

También podemos entender la imposibilidad esencial de que un modelo (científico o de cualquier tipo) sea completo mediante un argumento iterativo:

- El modelo modela al universo y el universo incluye al modelo, entonces…

- El modelo debe modelarse a sí mismo, entonces…
- El modelo debe modelar al modelo modelándose a sí mismo…
- …y así ad infinutum.

FILOSOFÍA

La filosofía, o mejor dicho, las filosofías, son disciplinas del conocimiento que también parten de un sistema finito de axiomas básicos, por lo que también deben de sujetarse a las limitaciones impuestas por el teorema de Gödel. La implicación es que cualquier sistema filosófico, sin importar su grado de complejidad, resulta incompleto. Es decir que todo sistema filosófico contiene dentro de sí mismo, más aseveraciones verdaderas que las que puede demostrar como tales de acuerdo con sus propias reglas. Es decir, que muchas de las verdades filosóficas nunca podrán decidirse dentro del sistema filosófico que consideremos, cualquiera que este sea. Y aun si el sistema filosófico en cuestión se aumenta, incluyendo un número indefinido de axiomas adicionales, siempre existirán verdades que no pueden ser formalmente derivadas del conjunto aumentado. El teorema de Gödel establece que la verificabilidad es un concepto más débil que la verdad, en tanto que existen proposiciones verdaderas que no son posibles verificar, sin importar la complejidad del sistema filosófico subyacente.

Para muchos pensadores, el teorema de Gödel constituye el último clavo en el ataúd de la filosofía clásica. Hubo una época en que la filosofía abarcaba todos los campos del conocimiento (Filos=amor, sofos=conocimiento), pero con la llegada del método científico y el resultante auge de la ciencia, la filosofía fue perdiendo poco a poco muchos de los objetos de su estudio. La lógica, por ejemplo, que una vez era un baluarte de la filosofía, hoy forma parte de las matemáticas. La lingüística, antes también del interés de los filósofos, ahora queda comprendida en la teoría de la información. Las especulaciones filosóficas sobre la mente humana, que dieron lugar al nacimiento de la psicología, hoy encuentran poderosos resultados en los trabajos de investigadores en inteligencia artificial e informática.

La filosofía, desplazada en muchos de sus territorios por la ciencia, ha tenido que ir encontrando nuevos objetos de estudio. De alguna forma el teorema de Gödel cierra un círculo para la filosofía, pues hoy un filósofo sabe de las limitantes que el teorema de Gödel implica para su disciplina, por lo que está obligado a redefinir su objeto de estudio y terminará ampliándolo para considerar nuevamente a todo el conocimiento, pero desde una nueva perspectiva que considera ya las limitaciones impuestas por Gödel.

Por ejemplo, el credo básico del positivismo lógico lo resume Rudolf Carnap en su manifiesto cuando dice: “No damos respuestas a cuestiones filosóficas y de hecho rechazamos todo problema filosófico, sea de la metafísica, la ética o la epistemología.” (John Passmore en “Logical Positivism”, en la “The Encyclopedia of Philosophy”, vol. 5, pp. 52-57).

El planteamiento de esta escuela filosófica es que toda aseveración filosófica abstracta como "todo es uno” no tiene sentido. No es que sea verdadera o falsa, sino que simplemente carece de significado. Esta postura se basa en el “principio de verificabilidad” de acuerdo al cual el significado de una aseveración es idéntico al método para verificarlo. Puesto que los positivistas no hallaron forma alguna de verificar aseveraciones como “todo es uno” o “lo absoluto no existe en el tiempo”, estas aseveraciones se consideraron como carentes de significado.

Curiosamente muchos filósofos modernos encuentran campos fértiles para su disciplina en aspectos del conocimiento que también le interesaron a Gödel, a Einstein y a otros grandes pensadores por el simple hecho de que no se basan en sistemas axiomáticos finitos. Nos referimos a lo que se pudiera llamar el misticismo. Wittgenstein, quien tuvo influencia sobre Gödel en sus años de estudiante en Viena, dice al respecto: “Hay en efecto cosas que no pueden ponerse en palabras. Ellas simplemente se manifiestan. Ellas constituyen lo místico.”

El propio Wittgenstein, amigo cercano de los integrantes del Círculo de Viena, aunque no miembro del mismo, ofrece en su maravilloso libro Tractatus Logico-Philosophicus una solución a los problemas tradicionales de la filosofía: “Aquello de lo que no nos es posible hablar, debemos dejarlo pasar en silencio”. Wittgenstein a veces tomó posturas filosóficas que se asemejan al misticismo Zen. En el libro citado elegantemente describe su posición: “Sentimos que aun cuando todas las posibles preguntas científicas tengan ya una respuesta, el problema de la vida no habrá sido tocado. Por supuesto, no quedarán ya preguntas que hacer y esto es justamente la respuesta. La solución del problema de la vida se halla en la desaparición del problema”.

LINGÜÍSTICA

La lingüística es una de esas áreas del conocimiento humano cuyo objeto ha sido estudiado por diversas disciplinas atendiendo a numerosos enfoques. Por ejemplo: la filosofía clásica estudió la forma como las personas hablan y escriben (gramática, retórica, sintaxis, etc.); la lingüística propiamente dicha estudia los aspectos profundos de las estructuras gramaticales y sintácticas del lenguaje; la psicología ha investigado los mecanismos mentales del lenguaje y la interacción entre lenguaje e inteligencia; la informática considera la comunicación en general incluyendo los lenguajes formales que "hablan" las computadoras entre sí; la robótica e inteligencia artificial intentan construir máquinas autónomas e inteligentes que se comuniquen entre sí y con los seres humanos.

Sin importar cuál sea el enfoque particular hacia el lenguaje, el punto de partida de todas estas disciplinas es la existencia de un conjunto finito de reglas o axiomas sobre los cuales se establece la creación y el uso de los lenguajes. Es posible que algunas de estas reglas básicas no se expresen en forma explícita o que ni siquiera se conozcan todavía. Sin embargo, en todas las disciplinas mencionadas se intenta establecer dicho conjunto finito de axiomas a partir de los cuales se construyen los lenguajes. Debido a esto el estudio del lenguaje y las comunicaciones también está limitado por el teorema de Gödel.

En la primera parte vimos ejemplos de esto. Frases como "Yo sólo sé que no se nada" o "Esta aseveración es falsa" nos llevan a contradicciones en el uso del lenguaje. Estas contradicciones son ejemplos de las limitaciones impuestas por el teorema de Gödel a cualquier sistema lingüístico.

En términos de Gödel puede demostrarse que en todo sistema lingüístico consistente algo debe de resultar indecidible. Una frase indecidible es precisamente la aseveración de esa verdad, es decir la aseveración que dice de sí misma que no es verificable. Un lenguaje consistente no puede incluir una oración que se niega a sí misma y permanecer consistente.

La excepción más significativa e importante es la poesía. Al poeta se le permiten todas las inconsistencias que deseen, todas las contradicciones y todas las paradojas. Pero la poesía no viola al teorema de Gödel porque justamente no está basada en un conjunto finito de reglas o axiomas, sino todo lo contrario: la poesía goza de toda la libertad en el uso del lenguaje y no requiere de consistencia alguna. Si hacemos referencia al último párrafo de la sección anterior (filosofía) queda claro que la poesía se escapa de las garras del teorema de Gödel por que pertenece al ámbito del misticismo.

INFORMÁTICA

Una computadora, por poderosa que sea, tiene un número finito de componentes o transistores en su unidad de procesamiento central. Cualquier programa que corra en dicha computadora, por complejo que sea, tiene un número finito de instrucciones. Los componentes del hardware y del software incluyen dentro de si los axiomas básicos del sistema computacional. Entonces, todo sistema lógico de razonamiento y de conocimientos basado en computadoras cumple con la hipótesis del teorema de Gödel y por lo tanto está sujeto a sus resultados.

Esto implica que es imposible programar una computadora, por poderosa que ésta sea, para resolver todas las cuestiones matemáticas que se le planteen o para modelar todos los sistemas que se deseen. El teorema de Gödel establece limitantes esenciales para la computación y en especial para inteligencia artificial en tanto que afirma que siempre existirán problemas indecidibles dentro de dicho sistema computacional. Es posible que estos problemas puedan decidirse con una computadora todavía más poderosa, pero también para ésta existirán nuevas incógnitas indecidibles. Un ejemplo es el de un programa que realiza un conjunto de operaciones matemáticas, pero que por complejo y sofisticado que sea, nunca podrá determinar que ya terminó de realizar sus cálculos.

El teorema de Gödel ha sido utilizado para argumentar tanto a favor como en contra de que una computadora algún día llegará a ser tan inteligente como un ser humano. Los que afirman que la computadora nunca alcanzará la inteligencia de un humano argumentan que la amplitud de los conocimientos y capacidades de la máquina están limitados por un conjunto de axiomas finito y por lo tanto debe de obedecer al teorema de Gödel, mientras que el humano no tiene estas limitaciones y puede descubrir verdades inesperadas. Los oponentes de esta postura argumentan que también la mente humana es finita y por lo tanto también está sujeta al teorema de Gödel, por lo cual algún día, por lejano que éste sea, se construirá una computadora cuyos componentes sean del mismo orden de magnitud a los de la mente humana o todavía mayores.

Nuevamente esta especulación sobre si la mente humana funciona con base en un conjunto finito de axiomas nos lleva, como llevó al propio Gödel, a considerar aspectos que sólo podrían calificarse como pertenecientes al misticismo.

VIDA ARTIFICIAL

Es una rama de la informática que pretende crear sistemas vivos que residan completamente en una computadora. Los elementos de estas especies virtuales exhibirían todas las características de los seres vivos incluyendo su evolución. El teorema de Gödel es difícil de interpretar en este contexto, pues la definición misma de vida (como también la definición de inteligencia) no puede considerarse todavía como bien establecida, clara y consistente. Sin embargo, intentemos plantear algunas cuestiones especulativas interesantes.

El propio Gödel afirmó que el mecanicismo en la biología puede demostrarse matemáticamente como falso; sin embargo, nunca realizó tal demostración. Es posible que los avances de vida artificial lleven a la demostración postulada por Gödel. Es probable que los avances de las investigaciones de esta disciplina estén todavía lejos de resolver completamente la pregunta "¿qué es la vida?". Es posible también que esta pregunta no tenga respuesta o que sea la pregunta equivocada. Pero cualquier intento de responderla, desde los proyectos, más modestos que sólo pretenden explicar qué es la vida, hasta los más ambiciosos que desean sintetizarla, nos dan mucho material para especular y nos acercan a una mejor comprensión del mundo en el que vivimos y de nuestra posición en él.

MENTE Y CONCIENCIA

Lo señalado anterior nos obliga a plantearnos preguntas como ¿qué es mi mente? y ¿qué es mi conciencia? Muchos científicos piensan que el cerebro humano, constituido por un número acotado de neuronas e interacciones electro-químicas, es la base de un sistema formal increíblemente sofisticado, pero basado en un conjunto finito de reglas y axiomas. Si esto fuera cierto, entonces el teorema de Gödel implicaría que existen hechos que son verdaderos, pero que nuestra mente nunca podrá demostrar o creer o ni siquiera concebir.

No hace demasiado tiempo aparecieron en la ciencia occidental ideas especulativas de que la conciencia es mayor que el universo y que el universo entero está contenido dentro de la conciencia. Esta es una idea antigua en oriente en donde se considera factible, e incluso frecuente, el proceso de iluminación mediante el cual el individuo abre los "párpados espirituales", despierta de la inconciencia y toma posesión de la conciencia universal. Según el budismo, el hinduismo, el yoga y otras filosofías orientales es entonces a través de la conciencia que llegaremos a la comprensión del universo.

Para efectos de la aplicación del teorema de Gödel la pregunta entonces es si el universo es finito o infinito. Si aceptamos los infinitos, entonces el teorema de Gödel no se aplica y nuevamente nos vemos obligados a considerar opciones místicas para explicarnos lo inexplicable. En cambio, en el otro caso el resultado de Gödel se puede aplicar y encontramos la auto-referencia observando que tanto la conciencia como el universo son finitos y, por lo tanto, la unión de ambos representa un nuevo sistema o nuevo universo que debemos "entender" (si es que esta palabra todavía tiene sentido). Este proceso continúa indefinidamente de manera iterativa estableciendo por medio de la auto-referencia las limitaciones a mente y conciencia.

Las limitantes impuestas por el teorema de Gödel en este último caso implican que nunca seremos capaces de conocernos a nosotros mismos. La máxima “conócete a ti mismo” es inalcanzable, pues nuestra mente, como cualquier otro sistema cerrado y acotado, sólo puede conocerse a sí misma apoyándose tan sólo en lo que ya conoce de sí misma. Hay varias analogías que permiten entender por qué nuestra mente nunca llegará a entender a nuestra mente completamente. La primera es la de la yema de un dedo, la parte más sensitiva de nuestra piel, que nunca puede tocarse a sí misma. Otra es que nuestros ojos nunca pueden verse a sí mismos y a lo más que pueden aspirar es ver su reflexión en un espejo, lo que no es igual a verse a sí mismos. La última es que el cerebro, el órgano que registra el dolor, es completamente insensible al mismo.

El teorema de Gödel sugiere que una vez que nuestra habilidad para representar simbólicamente nuestras propias estructuras llega a cierto umbral crítico, hemos llegado al final del camino. El resto del territorio es inaccesible y nunca seremos capaces de comprendernos totalmente.

¿Cómo puedes saber que no estás loco? Plantearte esta pregunta es muy peligroso, pues a partir del momento que empiezas seriamente a cuestionar tu propia salud mental entras en el laberinto, caes en el remolino de las profecías auto-realizables y sigues el camino del “irás y no volverás”. Todos sabemos que un loco interpreta al mundo a través de su propia y peculiar lógica y que, para él, esta lógica es consistente. ¿Cómo puedes saber que tu lógica no es “peculiar”, si la única herramienta a tu disposición para responder a la pregunta es justamente esa lógica? De nuevo nos hallamos ante la auto-referencia que habita en las entrañas del teorema de Gödel. La respuesta es indecidible. ¿Quiénes son los locos, los que están dentro del manicomio o los que están afuera? Esto nos recuerda al segundo teorema de Gödel que dice que aquellas versiones formales de la aritmética que afirman su consistencia son inconsistentes.

La lección principal que podemos sacar del teorema de Gödel es que las posibilidades de la autorreflexión tienen ciertos límites impuestos por la consistencia y que esto parece ser cierto tanto para sistemas lógicos formales como para la mente humana. Cuando aplicamos el teorema a la mente concluimos que existen obstáculos esenciales sobre nuestra capacidad de auto-comprensión. Tenemos que admitir que ciertas verdades sobre nosotros mismos permanecerán siempre ocultas, si la imagen que tenemos de nosotros mismos debe de permanecer consistente. En particular preguntas como ¿quién soy?, ¿qué quiero? o ¿por qué estoy aquí? no encontrarán una respuesta completa dentro de nuestra propia mente.

EL BUDISMO ZEN

En el párrafo anterior escribimos la frase "...las posibilidades de la autorreflexión tienen ciertos límites impuestos por la consistencia." La consistencia de nuestros sistemas matemáticos o mentales occidentales es algo sagrado, precioso, cuya pérdida ni siquiera nos atrevemos a concebir. ¿Qué pasaría si prescindiéramos de la consistencia?

La respuesta es sencilla: no pasaría nada. Prescindir de la consistencia ha sido el enfoque del budismo Zen desde hace siglos. La respuesta que el Zen da a preguntas como ¿qué es la conciencia? y ¿quién soy yo? es, como todo en el Zen, a la vez muy sencillo y extremadamente complejo: La verdad, dice el Zen, la encontraremos yendo a sacar agua del pozo y cortando la leña para el hogar, es decir, en la vida cotidiana y en el aquí y el ahora. El Zen es lo más opuesto que hay al teorema de Gödel. Se sirve de contradicciones, paradojas y planteamientos carentes de consistencia lógica para "apagar" la mente y viajar por el camino místico directo hacia la iluminación o la conciencia del universo. Un planteamiento de este estilo se escapa del laberinto creado por el teorema de Gödel de una manera poco convencional: en vez de seguir el hilo de Ariadna y recorrer el laberinto en sentido inverso hasta llegar a la puerta de salida, salta imposiblemente hacia arriba desafiando a la lógica y ya está fuera.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE GÖDEL

Hoy en día se conocen numerosas demostraciones del teorema de Gödel. En esta sección presentaremos una demostración no muy rigurosa pero muy fácil de entender. Si te interesas lector, en una demostración realizada con todo el rigor matemático te sugerimos la que el propio Gödel publicó, misma que encontrarás en la sección de enlaces a otras páginas.

La demostración del teorema de Gödel que vamos a presentar tiene sabor a informática y está inspirada en la que hallamos en el excelente libro de Rudy Rucker: Infinity and The Mind.

Resulta que la empresa transnacional de alta tecnología La Torre de Marfil, Inc. ha diseñado y construido una nueva computadora tan poderosa que la ha bautizado como la Máquina de la Verdad Universal (MVU) ya que es capaz de contestar correctamente cualquier pregunta que se le haga.

Esta máquina utiliza un grandísimo número de transistores que supera en varios órdenes de magnitud al de cualquier supercomputadora anteriormente construida. La máquina realiza una inmensidad de operaciones lógico-matemáticas por segundo, tiene una enorme memoria RAM y una capacidad de almacenamiento en disco verdaderamente fabulosa. En cuanto a su software, esta computadora maneja los últimos avances de la inteligencia artificial y sus bases de datos y sistemas expertos contienen la totalidad del conocimiento de la humanidad. La cantidad total de líneas de código de estos programas es inmensa. Nunca antes se habían escrito programas tan complejos. Es verdaderamente la máquina de la verdad universal.

El día de su presentación, con muchos bombos y platillos, la orgullosa empresa La Torre de Marfil, Inc., pone la máquina a disposición del público y pide que se le hagan preguntas, cualesquiera preguntas, mismas que la MVU contestará infaliblemente y de forma inmediata.

Al evento asistió un joven llamado Kurt Gödel que primero escribió la siguiente frase:

G = La MVU no dirá que esta frase (o sea G) es verdad, y después le hizo la siguiente pregunta a la máquina:

LA FRASE G, ¿ES VERDADERA O ES FALSA?

La máquina empezó a vibrar, arrojó un poco de humo, un par de chispas y se congeló permanentemente sin haber dado respuesta a la pregunta de Gödel. Con esto terminó el evento, La Torre de Marfil, Inc. quebró y Gödel fue aclamado como uno de los científicos más brillantes del siglo XX.

¿Qué sucedió en el interior de la máquina? Veamos: En primer lugar es importante destacar que la computadora era finita en todas sus características: el número de transistores, la cantidad de líneas de código y todos sus demás parámetros, si bien eran mucho muy grandes, no eran infinitos. Esto es equivalente a decir que estamos tratando con un sistema basado en un número finito de axiomas.

El razonamiento de la máquina fue el siguiente: Voy a suponer que G es verdad, y si ese fuera el caso, entonces podría responder “En efecto, G es verdad”. Pero al examinar a la frase G aparece inmediatamente una contradicción, pues la frase dice justamente que yo, la MVU, nunca diré que G es verdad. O sea, que si concluyo que G es verdad y lo digo públicamente, entonces por el hecho mismo de decirlo hago que G sea falsa y como consecuencia mi aseveración sería una mentira y yo no puedo mentir.

Con lo anterior queda establecido que yo, la MVU, nunca diré que G es verdad. Como consecuencia, por el simple hecho de guardar silencio hago que G sea verdad. ¡Como soy la MVU y nunca puedo mentir, mejor no contesto y me congelo!

Al congelarse y no responder, la Máquina de la Verdad Universal hace que la frase G sea cierta. Entonces Gödel dice: Yo conozco una verdad que la MUV no puede afirmar. Yo sé que la frase G es verdadera, pero la máquina es incapaz de decidir si G es verdadera o es falsa. Por lo tanto la máquina no es verdaderamente universal.

Además no importa si le aumentan sus transistores y sus líneas de código un millón de millones de veces, pues la máquina nunca podrá decidir sobre la verdad o falsedad de la frase G.

La demostración que acabamos de presentar no tiene el rigor que las matemáticas requieren. Sin embargo Gödel fue capaz de encontrar para cualquier sistema axiomático finito una ecuación polinómica compleja cuya solución existe si y sólo si G es verdad. Es decir, que G no es una frase vaga y mal definida que se basa en juegos de palabras. Al contrario, G es un problema matemático específico cuya solución conocemos, pero que el sistema axiomático en cuestión es incapaz de decidir si es cierta o falsa. La consecuencia demoledora del teorema de Gödel es que dicho sistema axiomático finito, cualquiera que este sea, no puede representar una teoría completa y definitiva de las matemáticas.